Zur Mathematik der Quantenfeldtheorie

(Paul Natterer)

Man unterscheidet grundsätzlich in den Quantenfeldtheorien zwei Symmetrie-gruppen, also zwei Gruppen oder Klassen von Invarianten oder Gesetzen: die **quantitative**, dimensionale **Raumzeit-Gruppe** und die **qualitative**, **lokale Symmetriegruppe,** auch Zustandsraum genannt.

Dazu sollte man bei der Beschäftigung mit Quantenfeldtheorien wissen, dass Funktionen bzw. Differentialgleichungen der klassischen Physik (Differential- und Integralrechnung) durch Vektoren ersetzt werden können (Vektorrechnung).

- Der geniale Göttingen Mathematiker David Hilbert hatte gezeigt, dass Funktionen sich formal genauso verhalten wie Vektoren: Sie bilden eine mathematische Superstruktur, die mit der Superstruktur von Vektoren, dem Vektorraum, übereinstimmt. Man nennt sie hier den **Hilbert-Raum**.
- Der Unterschied ist lediglich der, dass eine Funktion unbestimmt ist, d.h. unendlich viele Komponenten (x/y-Werte) haben kann, während Vektoren nur eine bestimmte Anzahl n an Dimensionen haben. Mit Funktionen kann man dieselben Operationen ausführen wie mit Vektoren. Im Fall der Vektoren geschieht dies durch eine Matrix, mit der der Vektor in der Regel multipliziert wird. Was entsteht ist wieder ein Vektor.
- Im Fall der Funktion nennt man die Matrix einen Operator. Auch er erzeugt durch Multiplikation mit einer Funktion eine neue Funktion höherer Ordnung. Matrizen und Operatoren haben im Allgemeinen zwei Wirkungen: Sie ändern Länge (Streckung) und Richtung (Drehung) der Vektoren bzw. Funktionen.
- Besonders wichtig für die Physik sind nun Operationen, bei denen keine Drehung erfolgt, was bedeutet, dass die ursprüngliche und die neue Funktion parallel laufen. Funktionen, die von einem bestimmten gegebe-nen Operator nicht gedreht werden, heißen seine **Eigenfunktionen**. Die sich ergebenden zugehörigen Werte heißen die **Eigenwerte** des Operators.
- Damit können wir die Axiome oder Grundgesetze der Quantenmechanik nachvollziehen:
  1. Ein physikalisches System wird durch eine Funktion Ψ dargestellt (= Zustandsfunktion Ψ).
  2. Jede physikalische Größe entspricht einem Operator (Orts-, Impuls-, Zeit-, Energie-Operator).
  3. Genau bestimmte physikalische Größen sind Eigenwerte von

Eigenfunktionen des Operators.
4. Komplexe physikalische Systeme lassen sich durch ein Gemisch übereinander gelagerter (addierter) Zusatzfunktionen Ψ „zusammenbauen“, die man aber alle als gleichzeitig vorhanden betrachten kann. Der Anteil der einzelnen Zustandsfunktionen (z.B. die Lage- oder Impuls-Operatoren) an messbaren, präzise bestimmbaren physikalischen Größen ist nur bis zu einer bestimmten Grenze von Genauigkeit oder Wahrscheinlichkeit zu ermitteln (= **Heisenberg‘sche Unbestimmbarkeitsrelation**).

- Solchermaßen beschriebene Quantenobjekte haben einen aktuellen Zustand und einen Spielraum von Möglichkeiten (Möglichkeitsraum), der ihren Typ oder ihre Art bestimmt. Typische Arteigenschaften sind allgemeine Merkmale wie Gewicht, Energie, Drehsinn. Beides zusammen nennt man den Zustandsraum (*scale space*). Dieser Zustandsraum eines Operators ist ein komplexer Hilbertraum.
- Die vollständige Menge von Eigenzuständen ist die Basis oder das Koordinatensystem dieses Hilbertraums. Jeder einzelne Eigenzustand ist eine Achse des Koordinatensystems eines n-dimensionalen Zustandsraums.
- Diese Quantenobjekte und ihre Eigenschaften sind – nach bestimmten Deutungen der Quantentheorie wie z.B. der Quantenpotenzialerklärung – auch physikalisch real. Sie sind nur nicht direkt, sondern lediglich indirekt beobachtbar. Sie befinden sich einfach in einer unsichtbaren sehr komplexen Welt mit viel mehr Dimensionen.